

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЦЕНТРАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XIV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

IV кръг
Теоретичен тур

Старша възраст – решения

1 задача. Необикновен обект. С изключително прецизни методи на изследване астрофизикът Калин Кръстев установил, че новооткритата от него неутронна звезда има диаметър 26 км. Тя се наблюдава като пулсар, чиито импулси се регистрират на Земята с честота 126 в секунда. Оценете приблизително каква е минималната възможна плътност на този обект.

Решение:

За да бъде пулсарът устойчив, то гравитацията му на повърхността трябва да надвишава центробежните сили, които възникват, вследствие на околоосното му въртене. Нека да означим периода му на въртене около оста с T . Той е равен на интервала от време между два последователни импулса, които се регистрират от него или $1/126\text{s} \approx 0.008\text{s}$. Означаваме ъгловата му скорост на въртене с $\omega = 2\pi/T$. Ако радиусът на пулсара е R , то максималното центробежно ускорение, което изпитва частичка от него, намираща се на повърхността му, е $a_c = \omega^2 R$. Гравитационното ускорение, което ѝ се придава, е $g = \gamma M/R^2$, където M е масата на пулсара, а γ е гравитационната константа.

Нека ρ е търсената плътност. Тогава $M = (4/3)\pi\rho R^3$. Така получаваме, че $g = 4\pi\gamma\rho R/3$.

Както вече казахме, за да бъде пулсарът устойчив, трябва гравитационните сили да надвишават центробежните. От тук следва, че $a_c < g$, или $\omega^2 R < 4\pi\gamma\rho R/3$. Като използваме, че $\omega = 2\pi/T$, получаваме:

$$\rho > 3\pi/\gamma T^2$$
$$\rho > 2,24 \times 10^{15} \text{ kg/m}^3.$$

Имайки предвид, че това е само минимална оценка, то можем да кажем, че плътността е наистина впечатляващо висока! Ето защо, тези обекти са толкова интересни за астрономите.

Критерии за оценяване (10 т.):

За правилни съображения кога пулсарът ще е стабилен – 3т.

За правилно изразяване на центробежните сили – 2т.

За правилно изразяване на гравитационните сили – 2т.

За правилен математически израз за плътността и правилна числена стойност – 2т.

За извод, че това е минимална оценка – 1т.

2 задача. Космически проект. Както е известно, поради елиптичната форма на марсианската орбита, Марс в противостояние може да е на значително различаващи се разстояния до Земята. Веднъж на около 17 години се случва т.нар. велико противостояние, когато има максимално сближаване на Земята и Марс.

През 2030 г. космическите инженери Ивайло и Михаела работят по проект с фантастични мащаби за преустройство на Слънчевата система. В резултат Марс е заставен да се движи по съвсем нова кръгова орбита около Слънцето. При това той се сближава максимално със Земята веднъж на 17 години.

- Какъв би трябвало да е орбиталният период на Марс тогава? Считайте, че Земята също се движи около Слънцето по кръгова орбита.
- На какво разстояние ще се намира Марс от Земята при максимално сближаване?
- Каква ще е видимата звездна величина на Марс при максимално сближаване със Земята? Понастоящем видимата звездна величина на Марс при средно противостояние е $-1,65^m$. Средното разстояние на Марс от Слънцето е 1.524 астрономически единици.

Решение:

Понеже Марс е веднъж на всеки 17 години най-близо до Земята, то това е неговият синодичен период T_{SYN} относно нашата планета. Имайки само тази информация обаче, ние всъщност имаме две възможности: Марс да е бил оставен като външна планета, или да е бил заставен да стане вътрешна.

Ако предположим, че Марс остава външна планета дори след намесата на двамата инженери, то можем да запишем следното равенство за синодичния му период:

$$1/T_{SYN} = 1/T_3 - 1/T_M,$$

където T_M е търсеният орбитален период на Марс, а $T_3=1$ година. Следователно:

$$T_M = T_{SYN} \cdot T_3 / (T_{SYN} - T_3)$$

$$T_M \approx 388 \text{ денонощия.}$$

В другия случай в който Марс е бил накаран да стане вътрешна планета, за синодичния му период е в сила:

$$1/T_{SYN} = -1/T_3 + 1/T_M,$$

$$T_M = T_{SYN} \cdot T_3 / (T_{SYN} + T_3)$$

$$T_M \approx 345 \text{ денонощия.}$$

За да намерим минималното разстояние между Марс и Земята, трябва първо да изчислим радиуса на новата марсианска орбита r_M . Използваме връзката:

$$r \text{ [AU]}^3 = T \text{ [години]}^2$$

Оттук за двата случая пресмятаме:

$$r_M = 1,041 \text{ AU} \text{ и } r_M = 0,962 \text{ AU.}$$

Следователно, ако Марс е външна планета минималното разстояние между него и Земята е 0,041 AU, а ако е вътрешна – 0,038 AU.

Относно максималния блясък на Марс, първо ще разгледаме случая в който той е външна планета. Факторите, влияещи върху блясъка му, които се променят са следните:

- намалява разстоянието Марс – Слънце r_M , което води до по-голяма осветеност върху Марс и от там до повече отразявана светлина от него. Това увеличава яркостта на Марс за земния наблюдател;
- намалява минималното разстояние Земя – Марс $r_{З-М}$, което отново води до повишаване на видимия от Земята блясък на Марс.

Всички други фактори, от които блясъка на Марс зависи, не се променят, за това можем да не ги отчитаме. За осветеността E_M , която Марс създава върху можем да запишем следното:

$$E_M \sim 1/(r_M^2 \cdot r_{З-М}^2)$$

На сегашната орбита на Марс имаме, че: $r_M = 1,524 \text{ AU}$, следователно в опозиция $r_{З-М} = 0,524 \text{ AU}$. След намесата на Михаела и Ивайло $r_M = 1,041 \text{ AU}$, следователно в опозиция $r_{З-М} = 0,041 \text{ AU}$. Това означава, че разстоянието Марс – Слънце намалява 1,46 пъти, а разстоянието Земя – Марс – 12,8 пъти. Следователно, блясъкът на Марс ще нарастне 350 пъти. От тук получаваме, че ако m е звездната му величина при сегашно противостояние, то тогава тя ще бъде:

$$m_1 = m - 2,5 \cdot \lg(350) \approx -8^m$$

Това е наистина удивително! Веднага трябва да кажем на Михаела и Иво да се захващат за работа!

В случая когато Марс става вътрешна планета, минималното сближаване ще съответства на конфигурация долно съединение. Тогава към нас ще е обърната изцяло тъмната част на планетата. Поради това, осветеността, която Марс ще създава върху нас в този момент ще бъде равна на 0.

Критерии за оценяване (12т.):

За напълно вярна задача, но без да е отчетен вторият случай се отнемат общо 4 т.

За правилен израз за синодичния период – 2 т.

За правилно изчислен сидеричен период – 1 т.

За съобразяване в каква конфигурация разстоянието е минимално – 1 т.

За правилно използване на третия закон на Кеплер – 1,5 т.

За правилно получена числена стойност – 0,5 т.

За правилно съобразяване на факторите от които зависи блясъкът на Марс и които се променят – 2т.

За правилна математическа постановка – 2т.

За правилен израз и вярна числена стойност – 1т.

За съобразяване на блясъка в случая за вътрешна планета – 1т.

3 задача. Астероид. Разполагаме с телескоп, с диаметър на обектива 60 см и фокусно разстояние 7 м, оборудван със CCD камера, имаща размер на пиксела 12 μm и квантова ефективност 60%. С телескопа се наблюдава астероид от 18.5^m с голяма полуос на орбитата 4 AU и размери 10 км, който е в опозиция, обикалящ по кръгова орбита около Слънцето.

- Каква е максималната продължителност на експозицията с която можем да снимаме астероида, така че образът му да не е размит върху кадъра?

- Ще можем ли да го регистрираме, ако фонът на небето е равен на 20^m/arcsec²?

- Обяснете качествено как влиянието на земната атмосфера би променило Вашия отговор.

Полезна информация:

- Квантовата ефективност се дефинира като частта от фотоните, които се регистрират от един приемник на светлина.
- Знаем, че от звездата Вега (0^m) всяка секунда пристигат 10 000 фотона на квадратен сантиметър.
- Считаме, че можем да регистрираме астероида ако от него са паднали поне 3 пъти повече фотони, отколкото от фона на небето.

Решение:

Астероидът е достатъчно голям и с достатъчно малки размери, за да считаме, че е точков източник на светлина. Дифракционният лимит на телескопа е $\alpha'' = 14/D_{[cm]} = 0.23''$, а мащабът на изображението $\delta = 206265'' d_{px} / F = 0.35''/\text{px}$. Следователно ще считаме, че астероидът заема един пиксел върху CCD матрицата на телескопа.

Максималното време за експозиция ще бъде времето, за което астероидът преминава ъгловото разстояние, отговарящо на един пиксел – δ . Нека изчислим неговата ъглова скорост:

$$\omega = \Delta v / r ,$$

където Δv е относителната линейна скорост между Земята и астероида, а $r = 3 \text{ au}$, разстоянието между тях. За да намерим скоростта на астероида, първо ще изчислим периода му от третия закон на Кеплер:

$$a^3/T^2 = a_3^3/T_3^2 ,$$

където от лявата страна на уравнението стоят периодът и голямата полуос на астероида, а от дясната тези на Земята в години и астрономически единици

респективно. Получаваме за периода на астероида $T = 8$ години. Изчисляваме неговата орбитална скорост:

$$v = 2\pi a/T = 15 \text{ km/s}$$

$$\Delta v = v_3 - v$$

Максималното време на експозиция ще бъде:

$$t = \delta/\omega = d_{px}/F\omega = d_{px}r/F\Delta v = 51 \text{ s}$$

За това време, астероидът ще измине един пиксел върху кадъра и няма да се размие. За толкова време, фотони от него ще попадат в един пиксел, а ако продължим експозицията те ще започнат да попадат в съседния. Ако искаме да засечем астероида, няма смисъл да правим по-дълги експозиции, защото ако той не е засечен за това време, то при по-дълга експозиция той ще оставя същото количество фотони в съседни пиксели и никога няма да остави сигнал по-голям от този на фона в даден пиксел.

Единственото спасение е да настроим телескопа, така че той да следи не звездите, а самия астероид.

Нека все пак проверим дали експозицията от 51 s е достатъчна за неговото засичане. Осветеността върху CCD матрицата се определя от броя засечени от нея фотони. Можем да запишем закона на Погсън в следния вид:

$$N_B/N_A = 2.512^{4m},$$

където от ляво стоят броят фотони паднали от Вега и астероида на един квадратен сантиметър за секунда, а от дясно разликата в звездните им величини. Можем да изчислим, че от астероида всяка секунда идват приблизително 0.0004 фотона на кв. сантиметър ($0.0004 \text{ ф.} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$). От CCD камерата се засичат 60% от всички фотони попаднали върху огледалото на телескопа за определеното време на експонация.

$$N_{A\text{total}} = N_A \cdot (\pi D^2/4) \cdot t \cdot 60\% = 35 \text{ фотона}$$

Сега да проверим колко фотона от небето ще попаднат върху същия и съседните пиксели. Аналогично изчисляваме, че от всяка квадратна дъгова секунда от небето идват $N_{\text{небе}} = 0.0001 \text{ ф.} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{arcsec}^{-2}$. Тъй като небето, за разлика от астероида, е площен източник, то осветеността, която то ще създава върху камерата ще зависи от квадрата на светлосилата на телескопа D/F . Нека проверим как става това. Ъгловата площ, която вижда един пиксел от CCD камерата е $\delta^2 = d_{px}^2/F^2$. Пълният брой фотони попаднали от небето върху един пиксел ще бъде:

$$N_{\text{небе total}} = N_{\text{небе}} \cdot (\pi D^2/4) \cdot (d_{px}^2/F^2) \cdot t \cdot 60\% = 1.1 \text{ фотона}$$

Виждаме, че фотоните, попадащи от астероида са много повече, от тези попадащи от тъмното небе. Следователно експозиция от 51 s ще бъде напълно достатъчна за засичането на този астероид.

Нека да дискутираме влиянието на земната атмосфера. Тя поглъща част от фотоните и размива изображението. Дифракционният лимит на телескопа беше около $0.23''/\text{px}$. Такова изображение в редки случаи можем да получим само на най-добрите места за наблюдение от Земята – пустинята Атакама в Чили, Канарските или Хавайските острови. В повечето обсерватории обаче изображението е размито до 1 – 2 дъгови секунди. В такъв случай астероидът ще се разположи на няколко пиксела върху камерата и сигналът му ще падне (фонът на небето няма да се промени). За сметка на това, обаче ще можем да си позволим по-дълга експозиция, тъй като астероидът ще трябва да измине няколко пиксела преди да се размие.

Критерии за оценяване (17т.):

За изчисляване ъгловата скорост на астероида и максималната експозиция – 5 т.

За изчисляване колко фотона от астероида попадат във фокуса на телескопа – 5 т.

За изчисляване колко фотона попадат от небето – 5 т.

За коментари по влиянието на земната атмосфера – 2 т.

4 задача. Хладно Слънце. Да си представим, че на Слънцето се появява слънчево петно, което покрива цялата му повърхност. То има характерната за слънчевите петна температура около 4500 К.

- Как би се променила светимостта на Слънцето тогава в сравнение с настоящата му светимост?

- Може ли това състояние да продължи дълго, при положение, че няма промяна в процесите, които стават в ядрото на Слънцето? Обосновете вашия отговор.

- Нека приемем, че въпреки всичко температурата на повърхността на Слънцето остава понижена, но освобождаването на енергия в ядрото му продължава със сегашните си темпове, а Слънцето преминава към ново състояние на равновесие. Какво ще се промени, за да се постигне това ново равновесие? Направете количествени и качествени описания.

- Ще ни изглеждат ли променени цветовете и осветеността на предметите около нас? Дайте обяснение.

Решение.

Светимостта на една звезда се изразява чрез закона на Стефан-Болцман:

$$L = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2,$$

където T е температурата, а R радиусът на звездата. Ако цялото Слънце се покрие с едно огромно петно, то неговата температура ще спадне до 4500 К. Тогава можем да запишем, че светимостта на Слънцето ще намалее:

$$L_1/L_2 = (T_1/T_2)^4 \approx 2.72 \text{ пъти},$$

тъй като радиусът му не се променя.

Това състояние не може да продължи дълго, защото в ядрото на Слънцето продължава да се отделя енергия със същия темп. Тази енергия трябва да има възможност да се отдели от повърхността му. За да стане това, то се раздува, за да компенсира ниската си температура. Радиусът, до който ще се раздуе можем да намерим отново използвайки закона на Стефан-Болцман, като знаем, че светимостта му:

$$L_1/L_2 = (T_1/T_2)^4 (R_1/R_2)^2 = 1$$

$$R_1/R_2 = (T_1/T_2)^2 \approx 1.65 \text{ пъти}$$

За да продължи да съществува, покрито с огромното петно Слънцето трябва да увеличи радиуса си 1.65 пъти.

С по-ниска температура, максимумът на излъчване на Слънцето ще се премести към по-голяма дължина на вълната. Макар енергията, която достига Земята да остане същата, по-голяма част от фотоните ще бъдат в инфрачервената област и осветеността ще падне за човешкото око. Предметите ще ни изглеждат по-тъмни и по-червени. Допълнителен ефект, предизвикан от по-големите размери на звездата ни ще бъде, че сенките на предметите ще бъдат по-размити.

Критерии за оценяване (10т.):

За познаване на закона на Стефан-Болцман – 2 т.

За правилното му прилагане – 3 т.

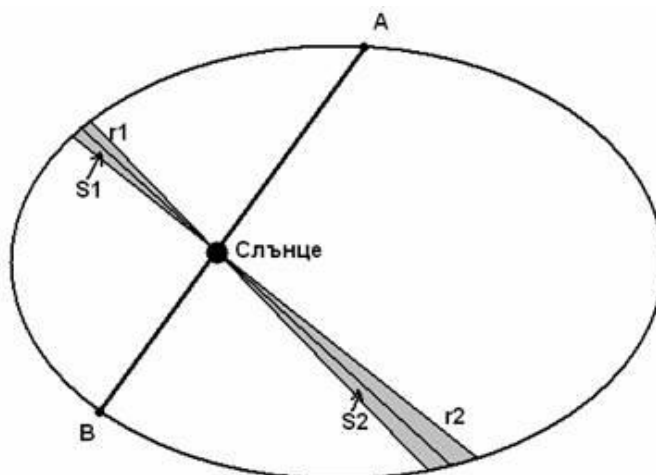
За верни числени резултати – 3 т.

За описание на предметите – 2 т.

5 задача. Комета. Разглеждаме комета, която обикаля около Слънцето по елиптична орбита. Прекарваме права, лежаща в орбиталната равнина и минаваща през Слънцето. Правата разделя кометната орбита на две части. Да се докаже, че при каквато и да е ориентация на правата, когато кометата изминава всяка от двете части от орбитата си, тя получава еднакви общи количества слънчева енергия. Изменението на размера на ядрото и опашката на кометата в близост до Слънцето да не се отчита.

Решение:

На схемата е показана кометната орбита, като прекараната права я пресича в точките А и В, както е показано на схемата.



Разглеждаме два клонящи към нула времеви интервала Δt_1 и Δt_2 през които кометата изминава пътища, виждащи се под един и същи ъгъл от Слънцето.

Понеже тези два интервала са много малки, то можем да считаме, че по време на тях кометата остава на постоянни разстояния от Слънцето, които означаваме, съответно с r_1 и r_2 . Отново, поради същата причина, можем да считаме, че скоростите ѝ, v_1 и v_2 не се променят, а преместванията в двата случая са отсечки с дължини, съответно:

$$x_1 = v_1 \cdot \Delta t_1 \quad \text{и}$$

$$x_2 = v_2 \cdot \Delta t_2.$$

Тъй като, тези премествания се виждат под един и същи ъгъл, то можем да запишем, че:

$$x_1 \sim r_1 \quad \text{и}$$

$$x_2 \sim r_2.$$

За описваните от радиус – вектора комета – Слънце площи, можем да запишем:

$$S_1 \sim x_1 \cdot r_1 \sim r_1^2 \quad \text{и}$$

$$S_2 \sim x_2 \cdot r_2 \sim r_2^2.$$

Съгласно втория закон на Кеплер, кометата се движи по своята орбита с постоянна площна скорост, поради, което е в сила следното равенство:

$$S_1/S_2 = \Delta t_1 / \Delta t_2.$$

Следователно:

$$\Delta t_1 / \Delta t_2 = r_1^2 / r_2^2.$$

Енергиите, които кометата получава от Слънцето през двата интервала от време са пропорционални на произведенията на съответните осветености I_1 и I_2 и съответните интервали от време. Но от друга страна можем да твърдим, че:

$$I_1 \sim 1/r_1^2 \quad \text{и}$$

$$I_2 \sim 1/r_2^2.$$

И така, за погълнатите енергии слънчева светлина получаваме:

$$E_1 \sim I_1 \cdot \Delta t_1 \quad \text{и}$$

$$E_2 \sim I_2 \cdot \Delta t_2.$$

Отношението им е:

$$E_1/E_2 = (I_1/I_2) \cdot (\Delta t_1/\Delta t_2) = (r_2^2/r_1^2) \cdot (r_1^2/r_2^2) = 1.$$

По същия начин можем да разделим целите участъци, които кометата изминава. Сумарната енергия, която тя получава във всяка една от двете части на орбитата е сума от тези малки енергии, които се поглъщат от нея в съответните малки участъци. Следователно и сумарната енергия ще е една и съща.

Критерии за оценяване (17т.):

За правилен подход към задачата, чрез разделяне на двете части от орбитата ѝ на малки частички – 4т.

За изразяване на отношението на лицата, чрез отношението на разстоянията – 3т.

За правилно прилагане на втория закон на Кеплер – 3т.

За правилно определяне на отношението на времевите интервали – 2т.

За изразяване на отношението на осветеностите – 2т.

За правилно съобразяване на количеството получена енергия – 2т.

За получаване, че енергиите са равни – 1т.